Trabajo Práctico Nro. 7

Series de Fourier

1. Sea $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([a,b])=\{\, f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R} \,/\, f$ es continua$\}$. Probar que:

   (a) Si en $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([-\frac{T}{2},\frac{T}{2}])$ se define: $\|f\|_1 = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|\,dx$, entonces $\|\ \|_1$ es una norma.

   (b) Si en $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([-\frac{T}{2},\frac{T}{2}])$ se define: $\langle f,g\rangle = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)g(x)\,dx$, entonces $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno y

   $$\|f\|_2=\sqrt{\langle f,f\rangle}=\left(\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$ la norma inducida correspondiente.

   (c) Las funciones $\left\{1,\ \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right),\ \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ forman un conjunto ortogonal respecto a $\langle\ ,\ \rangle$ en $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([-\frac{T}{2},\frac{T}{2}])$.

2. Sea $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}([a,b])=\{\, f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C} \,/\, f$ es continua$\}$. Probar que:

   (a) Si en $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}([-\frac{T}{2},\frac{T}{2}])$ se define: $\|f\|_1 = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|\,dx$, entonces $\|\ \|_1$ es una norma.

   (b) Si en $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}([-\frac{T}{2},\frac{T}{2}])$ se define: $\langle f,g\rangle = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\overline{g(x)}\,dx$, entonces $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno y

   $$\|f\|_2=\sqrt{\langle f,f\rangle}=\left(\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$ la norma inducida correspondiente.

   (c) Las funciones $\{\Phi_n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}} = \left\{e^{in\frac{2\pi}{T}x}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ forman un conjunto ortogonal respecto a $\langle\ ,\ \rangle$ en $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}([-\frac{T}{2},\frac{T}{2}])$.

3. Se dice que una función $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{K}$, para $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, es

   (i) absolutamente integrable en $[a,b]$ sii $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx<\infty$

   (ii) cuadrado integrable en $[a,b]$ sii $\int\limits_a^b |f(x)|^2\,dx<\infty$

   Mostrar que:

(a) En el espacio de las funciones absolutamente integrables en $[a,b]$, $\| \ \|_1$ cumple todas las propiedades de una norma excepto: $\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$ en $[a,b]$.

(b) En el espacio de las funciones cuadrado integrables en $[a,b]$, $\| \ \|_2$ cumple todas las propiedades de una norma excepto: $\|f\|_2 = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$ en $[a,b]$.

4. Probar que:

   (a) Si f es impar en $[-L,L]$ entonces $\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0$.

   (b) Si f es par en $[-L,L]$ entonces $\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\,dx$.

5. Hallar el desarrollo en serie trigonométrica de Fourier de las siguientes funciones definidas en el intervalo dado:

   (i) $f(x)=e^x,\ -\pi\leq x\leq\pi$ (ii) $f(x)=e^x,\ \pi\leq x\leq 2\pi$

   (iii) $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad -\pi\leq x<0 \\ 2 & \text{si} \quad 0\leq x\leq\pi \end{cases}$ (iv) $f(x)=\operatorname{sen}(2\pi x),\ -1\leq x\leq 1$

   (v) $f(x)=2x-1,\ 1\leq x\leq 3$ (vi) $f(x)=|x|,\ -2\leq x\leq 2$

   (vii) $f(x)=x,\ -1\leq x\leq 1$ (viii) $f(x)=x,\ 0\leq x\leq 2$

   (ix) $f(x)=\cos x,\ 0\leq x\leq 2$ (x) $f(x)=\begin{cases} x & \text{si} \quad -5\leq x<0 \\ x^2 & \text{si} \quad 0\leq x\leq 3 \end{cases}$

   En cualquiera de los casos anteriores: ¿es posible obtener otro desarrollo en serie de senos y cosenos? Ejemplificar.

6. Analizar si existe el desarrollo en serie trigonométrica de Fourier de las siguientes funciones definidas en el intervalo $[-\pi,\pi]$:

   (i) $f(x)=x\operatorname{sen}(1/x)$ (ii) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ (iii) $f(x)=\sqrt{|x|}$

   (iv) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$ (v) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{|x|}}$

7. Para las siguientes funciones definidas en el intervalo dado, hallar la serie de Fourier en cosenos y la serie de Fourier en senos.

   (i) $f(x)=1$ $0\leq x\leq\pi$
   (ii) $f(x)=x$ $0\leq x\leq 1$ (confrontar con (vii) del ejercicio 5)
   (iii) $f(x)=\cos x$ $0\leq x\leq 2$ (confrontar con (ix) del ejercicio 5)
   (iv) $f(x)=e^x$ $0\leq x\leq\pi$ (confrontar con (i) del ejercicio 5)

8. Hallar el desarrollo en serie exponencial de Fourier de las siguientes funciones definidas en el intervalo dado:

   (i) $f(x)=x^2-x$ $-\pi\leq x\leq\pi$ (ii) $f(x)=e^{-x}$ $-1\leq x\leq 1$
   (iii) $f(x)=x$ $-1\leq x\leq 1$ (iv) $f(x)=|x|$ $-2\leq x\leq 2$

9. Supongamos f y g absolutamente integrables en $[-L,L]$ con $f(x)=g(x)$ excepto para $x=x_0\in[-L,L]$. ¿Cómo se relacionan las series de Fourier de f y g?

¿Qué sugiere esto acerca de la relación entre una función y su serie de Fourier en un intervalo?

10. Identificar para cuáles de las series de Fourier obtenidas en los ejercicios 5, 6, 7 y 8, es posible asegurar si converge en el intervalo indicado, en media cuadrática, puntualmente y/o uniformemente. En los casos en que hay convergencia puntual, especificar el límite.

11. Comprobar el valor de las series numéricas dadas, utilizando convenientemente propiedades de convergencia de los desarrollos en serie trigonométrica de Fourier de las funciones $f(x)$ propuestas. Justificar la validez de las propiedades consideradas.

    (a) $f(x)=|x| \quad , -\pi \leq x < \pi,$ $\qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

    (b) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad -\pi < x < 0 \\ x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases},$ $\qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

    (c) $f(x)=|\operatorname{sen} x| \quad , -\pi \leq x < \pi,$ $\qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1} = \frac{\pi-2}{4}$

    (d) $f(x)=x^2 \quad , 0 \leq x < 2\pi,$ $\qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

12. (a) Dada una una función integrable en $[0,T]$, a valores reales o complejos, sea g su extensión a todo $\mathbb{R}$ como función T–periódica.

    Probar que $\displaystyle\int_0^T g(x)\,dx = \int_a^{T+a} g(x)\,dx \quad \forall a \geq 0.$

    (Sugerencia: considerar sucesivamente los casos $a \leq T$ y $a > T$)

    (b) Sea f una función periódica de período T, y derivable. Probar que f' también es una función T–periódica.

13. Determinar la función a la que converge puntualmente en todo el eje real cada una de las series de Fourier obtenidas en los ejercicios 5, 6 , 7 y 8.

14. Encontrar constantes c_i de modo que:

    (a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} [x-(c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \operatorname{sen}(2x) + c_3 \operatorname{sen}(3x))]^2\,dx$ sea mínimo.

    (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 [e^x - \sum_{k=0}^{n} c_k \cos(k\pi x)]^2\,dx$ sea igual a cero.

15. Mostrar que si f es cuadrado integrable en $[-\pi,\pi]$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\,dx = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\,dx = 0$$

16. En cada caso, analizar la validez de la igualdad para todo $x \in [0,2]$:

(a) $x^2 = \dfrac{4}{3} + \dfrac{16}{\pi^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi}{2} x\right)$

(b) $x^2 = \dfrac{4}{3} + \dfrac{4}{\pi^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi x)}{n^2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{n}$

y estudiar si la serie resultante de derivar la serie término a término coincide con $2x$ para todo $x \in [0,2]$.

Método de separación de variables.

17. Analizar si $L[y] = 0$ con cada una de las condiciones de contorno dadas cumple las hipótesis del Teorema de Sturm Liouville. En caso afirmativo, hallar los autovalores λ_n indicando si son reales y positivos, y encontrar las autofunciones y_n correspondientes a λ_n:

(a) $L[y] = y'' + \lambda\, y$ con:
- (i) $y(0) = y(\pi) = 0$
- (ii) $y(0) = y'(\pi) = 0$
- (iii) $y'(0) = y'(\pi) = 0$
- (iv) $y(0) = y(2\pi)$, $y'(0) = y'(2\pi)$

(b) $L[y] = x^2\, y'' + x\, y' + \lambda\, y$ con:
- (i) $y(1) = y(e) = 0$
- (ii) $y(1) = y'(e) = 0$

18. Aplicar, si es posible, el método de separación de variables para obtener soluciones producto para las siguientes ecuaciones diferenciales:

(i) $u_x + u_y = 0$ (ii) $u_x + u_y = u$ (iii) $x\, u_x - y\, u_y = 0$
(iv) $y\, u_x - x\, u_y = 0$ (v) $x^2\, u_{xx} + u_{yy} = 0$

19. Resolver los siguientes problemas de contorno:

(i) $\begin{cases} k\, u_{xx} = u_t & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t \geqslant 0 \\ u(x,0) = x(1-x) & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} k\, u_{xx} = u_t & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 100 & t \geqslant 0 \\ u(x,0) = x(1-x) & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} k\, u_{xx} = u_{tt} & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t \geqslant 0 \\ u(x,0) = \operatorname{sen}^2 x & 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ u_t(x,0) = 0 & 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$

(iv) $\begin{cases} k\, u_{xx} = u_{tt} & 0 < x < 2,\ t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0 & t \geqslant 0 \\ u(x,0) = 1 - \cos(\pi x) & 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ u_t(x,0) = 0 & 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$

(v) $\begin{cases} u_{tt} = 3u_{xx} + 2x & 0 < x < 2,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(2,t) = 0 & t \geqslant 0 \\ u(x,0) = 0 & 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ u_t(x,0) = 0 & 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$

(vi) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - \cos x & 0 < x < 2\pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(2\pi,t) = 0 & t \geqslant 0 \\ u(x,0) = 0 & 0 \leqslant x \leqslant 2\pi \\ u_t(x,0) = 0 & 0 \leqslant x \leqslant 2\pi \end{cases}$

(vii) $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < 1,\ 0 < y < 2 \\ u(0,y) = u(1,y) = 0 & 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ u(x,0) = 0 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ u(x,2) = x(1-x) & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$

(viii) $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ u(0,y) = 0 & 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ u(1,y) = 1 - y & 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ u_y(x,0) = u_y(x,1) = 0 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$

20. Considerar la conducción del calor en una varilla de cobre, descripta por la ecuación diferencial $\alpha^2 u_{xx} - u_t = 0$ $(\alpha^2 = 1,14)$, de 1 m. de largo cuyos extremos se mantiene a 0ºC, para todo $t > 0$. Encuentre una expresión para la temperatura $u(x,t)$ si la distribución inicial de la temperatura en la varilla está dada por:

    (a) $u(x,0) = 0,5\,\mathrm{sen}\,(2\pi x) + 3\,\mathrm{sen}\,(5\pi x)$.

    (b) $u(x,0) = f(x)$ (indicar condiciones sobre f para que exista u).

21. Una varilla de longitud 2 coincide con el eje x en el intervalo $[0,2]$. Hallar la temperatura $u(x,t)$ de acuerdo con las siguientes condiciones de contorno:

    (a) El extremo izquierdo se mantiene a temperatura constante de 5ºC y el derecho a 10ºC. La temperatura inicial en toda la varilla es $f(x) = 2x$.

    (b) El extremo izquierdo se mantiene a temperatura 0ºC y el derecho está aislado. La temperatura inicial de toda la varilla es $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$.

22. Una cuerda de longitud 3 coincide con el eje x en el intervalo $[0,3]$. Hallar el desplazamiento $u(x,t)$ en los siguientes casos:

    (a) Los extremos están fijos en el eje x, la cuerda parte del reposo desde el desplazamiento inicial $x(3-x)$.

    (b) Los extremos están fijos en el eje x, inicialmente la cuerda no está desplazada pero su velocidad inicial es $\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{3}\right)$.

23. Determinar la distribución de temperatura de una placa rectangular delgada que verifica:

    (a) Los lados de la placa coinciden con los lados del rectángulo definido por $0 \leqslant x \leqslant 4 \ \wedge \ 0 \leqslant y \leqslant 2$. El lado izquierdo y la cara inferior de la placa están aislados. La cara superior se mantiene a una temperatura de 0ºC, y el lado derecho a una temperatura de $1 - \cos \pi y$ grados.

    (b) La placa coincide con la región definida por $0 \leqslant y \leqslant 2 \ \wedge \ 0 \leqslant x \leqslant \pi$. El lado izquierdo se mantiene a temperatura e^{-y} grados, y el derecho a temperatura 100ºC cuando $0 < y \leqslant 1$, y a 0ºC cuando $1 < y \leqslant 2$. La cara inferior permanece a una temperatura de e^{-x} grados y la superior está aislada.

24. Desarrollar la resolución de la ecuación de Laplace en el círculo, mediante la separación de variables $u(r,\theta) = R(r)T(\theta)$:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0 & 0 < r < R_0, \ -\pi \leqslant \theta < \pi \\ u(R_0, \theta) = f(\theta) & -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi, \ f \in \mathcal{C}^1 \\ u(r, -\pi) = u(r, \pi) & 0 \leqslant r \leqslant R_0 \\ u_\theta(r, -\pi) = u_\theta(r, \pi) & 0 \leqslant r \leqslant R_0 \end{cases}$$

Para el caso $f(\theta)$ constante, confrontar con la resolución mediante transformación conforme.

25. Resolver los siguientes problemas de contorno:

(a) $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & x^2+y^2<16 \\ u(x,y)=x^2 & x^2+y^2=16 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & 9<x^2+y^2<16 \\ u(x,y)=x & x^2+y^2=9 \\ u(x,y)=y & x^2+y^2=16 \end{cases}$

26. Desarrollar la resolución de la ecuación de Laplace en el dominio y las condiciones de contorno dadas en cada uno de los siguientes problemas:

(a) $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 & 0<r<R_0,\ 0<\theta<\pi \\ u(R_0,\theta)=f(\theta) & 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ f\in\mathcal{C}^1,\ \text{con } f(0)=f(\pi)=0 \\ u(r,0)=u(r,\pi)=0 & 0\leqslant r\leqslant R_0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 & 0<r<R_0,\ 0<\theta<\pi \\ u(R_0,\theta)=f(\theta) & 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ f\in\mathcal{C}^1,\ \text{con } f(0)=f(\pi)=1 \\ u(r,0)=u(r,\pi)=1 & 0\leqslant r\leqslant R_0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 & 0<r<R_0,\ -\pi\leqslant\theta<\pi \\ u_r(R_0,\theta)=f(\theta) & -\pi\leqslant\theta\leqslant\pi,\ \int_{-\pi}^{\pi} f(s)ds=0 \quad (*) \\ u(r,-\pi)=u(r,\pi) & 0\leqslant r\leqslant R_0 \\ u_\theta(r,-\pi)=u_\theta(r,\pi) & 0\leqslant r\leqslant R_0 \end{cases}$

¿Por qué es necesaria la condición $(*)$ sobre f?